Elementi di calcolo vettoriale e matriciale per il corso di Matematica

per Architettura Ambientale (sede di Piacenza)

Armando Bazzani
Dipartimento di Fisica Università di Bologna, INFN sezione di Bologna

Nella realtà si incontrano spesso grandezze che non si possono definire mediante un unico numero reale. Se ad esempio volessimo indicare la posizione di un oggetto nello spazio o la sua velocità (vedi fig. 1) o la direzione da seguire per arrivare in una data posizione, ciò è possibile introducendo dei segmento orientati. Un segmento orientato è necessario per individuare una grandezza che oltre ad un'intensità abbia anche una direzione. Se però non riuscissimo ad associare ai segmenti orientati delle propeità algebriche simili a quelle dei numeri reali, la definizione in sè sarebbe del *sterile* non potendo essere utilizzata come strumento matematico per descrivere la realtà. Nasce cosı̀ il concetto di vettore e di *Spazio Vettoriale* (l'insieme di tutti i vettori). Il fatto che le forze fisiche che sono alla base della Meccanica Classica e che descrivono l'evoluzione di svariati sistemi (dal moto dei pianeti a quello delle poarticelle di un gas), si comportino come vettori è uno di quei piccoli miracoli che rendono la matematica il più potente strumento creato dall'uomo per descruvere la realtà.

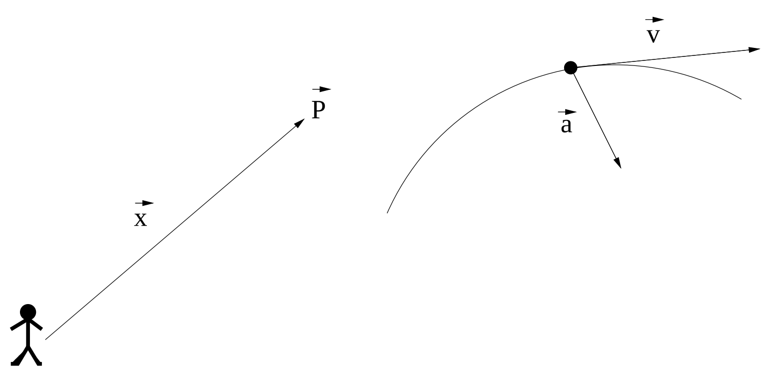

Fig. 1: utilizzo di segmenti orientati per individuare punti nello spazio rispetto ad un osservatore o quantità dinamiche nel moto di un punto materiale; una notazione matematica standard per indicare un vettore utilizza una lettera con una freccia sovrapposta.

In uno spazio vettoriale si introduce l'operazione di somma secondo la *regola del parallelogramma* illustrata nella figura 2

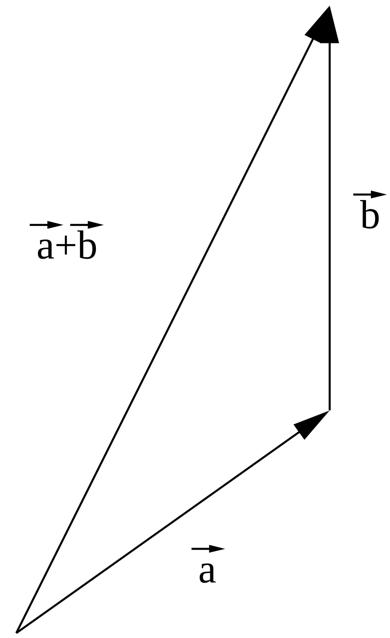

Fig.2: somma di due vettori secondo la regola del parallelogramma

Inoltre si associa ad un vettore la sua lunghezza come la lunghezze euclidea del segmento associato al vettore. L'operazione di somma gode delle proprietà commutativa ed associativa. L'elemento neutro della somme è il vettore nullo: ovvero il vettore di lunghezza nulla $\vec{o}$. Dato un vettore $\vec{v}$ il vettore opposto si definisce come il vettore che ha la stessa lunghezza, ma verso opposto e si indica con $\vec{v}$. L'operazione di somma consente di ricostruire le posizioni lungo un percorso nello spazio: supponiamo che un punto si muova sul piano partendo da un punto O e seguendo i segmenti orientati $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, quale sarà la posizione finale rispetto all'origine? Per rispondere a tale domanda è sufficiente costruire il vettore somma $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ (vedi fig. 3)

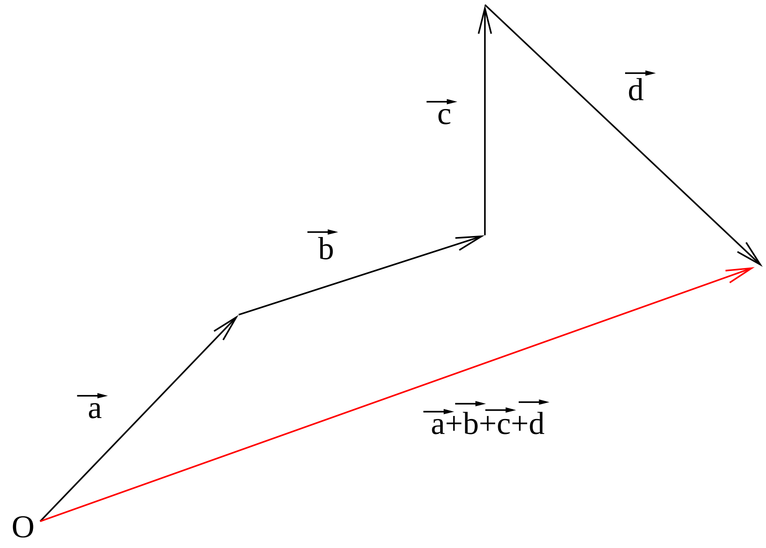

Fig.3: rappresentazione del moto di un punto nel piano tramite una successione di spostamenti; il vettore somma dei singoli spostamenti dà la posizione del punto finale rispetto al punto d'inizio O.

Il vettore ottenuto dalla somma di un insieme di vettori prende il nome di risultante e consente di risolvere i problemi di equilibrio delle forze in fisica.
Insieme alla somma si definisce il *prodotto* di un vettore $\vec{v}$ *per uno scalare* (un numero reale) λ secondo la regola che $\lambda\vec{v}$ è il vettore diretto come $\vec{v}$ se $\lambda > 0$ o diretto in senso opposto se $\lambda < 0$ con lunghezza pari a $|\lambda|$-volte la lunghezza di $\vec{v}$. Le operazioni di somma e prodotto per uno scalare godono della proprietà distributiva

$$\lambda(\vec{v} + \vec{u}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{u}$$

Tali operazioni caratterizzano il concetto di spazio vettoriale reale e consentono di introdurre la definzione di *dipendenza e indipendenza lineare*: sia dato un insieme di n vettori $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ diremo che i vettori sono linearmente dipendenti se esiste un insieme $\lambda_1, ..., \lambda_n$ di scalari non tutti nulli tali che

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i = \vec{o}$$

Nel caso la relazione valga solo se tutti i numeri λ_i sono nulli, i vettori $\vec{e}_i$ si dicono linearmente indipendenti. La condizione di dipendenza lineare si interpreta geometricamente dicendo che è possibile costruire un percorso chiuso nello spazio utilizzando le direzioni dei vettori $\vec{e}_i$ opportunamente scalate.
Il numero massimo di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale definisce la *dimensione dello spazio* in quanto è una caratteristica dello spazio stesso: ad esempio nello spazio fisico in cui ci muoviamo esistono al massimo 3 vettori linearmente indipendenti e per questo si dice tridimensionale. La dimensione di un piano è 2 come si può intuire dal fatto che è sempre possibile costruire un triangolo con i lati lungo 3 qualunque direzioni non coincidenti. Il fatto che la dimensione dello spazio sia 3 significa che dati 3 vettori linearmente indipendenti $\vec{e} + 1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ un qualunque altro vettore $\vec{v}$ nello spazio si può sempre scrivere come *combinazione lineare* dei 3 vettori dati

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$$

con $v_{1,2,3}$ numeri reali.
Si possono definire spazi vettoriali a dimensione arbitraria anche se non è facile averne una rappresentazione geometrica e i concetti che introduciamo possono essere estesi al caso più generale.
Un insieme di vettori linearmente indipendenti in numero pari alla dimensione dello spazio vettoriale si dice *base dello spazio*. Data una base $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ di uno spazio vettoriale n-dimensionale, ogni vettore $\vec{v}$ dello spazio si può esprimere come combinazione lineare della base

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i$$

In particolare una base consente di associare ad un vettore $\vec{v}$ una n-nupla di numeri $(v_1, ..., v_n)$ che si chiamano coordinate del vettore nella base scelta. Tutte le operazioni fatte sui vettori (somma e moltiplicazione per uno scalare) si possono esprimere direttamente mediante le coordinate dei vettori su una base dello spazio fissata. Consideriamo ad esempio due vettori $\vec{a}, \vec{b}$ rappresentati dalle coordinate $(a_1, ..., a_n)$ e $(b_1, ..., b_n)$ in una base fissata, le coordinate del vettore somma $\vec{a} + \vec{b}$ e del vettore $\lambda\vec{a}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$) nella stessa base sono

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n) \qquad \lambda\vec{a} = (\lambda a_1, ..., \lambda a_n)$$

Si capisce come il concetto di base e di componenti di un vettore in una base, sia molto potente in quanto consente una rappresentazione analitica di uno spazio vettoriale e l'utilizzo di strumenti quali i computer per fare i conti (un computer avrebbe altrimenti difficoltà a maneggiare segmenti orientati). Rimane il problema di come calcolare le componenti di un vettore in una base data.

Mediante le combinazioni lineari è possibile anche dare una rappresentazione di una retta, di un piano o di un parallelogramma e un parallelepipedo nello spazio tridimensionale. Consideriamo la retta passante per i punti P, Q (vedi fig. 4) prendiamo il vettore $\vec{u} = \vec{OP}$ dove O è il punto scelto come origine, e un vettore $\vec{v}$ diretto lungo la retta, possiamo rappresentare il vettore $\vec{OQ}$ che individua un punto qualunque sulla retta tramite la relazione

$$\vec{OQ} = \vec{u} + \lambda\vec{v} \qquad \lambda \in \mathbf{R}$$

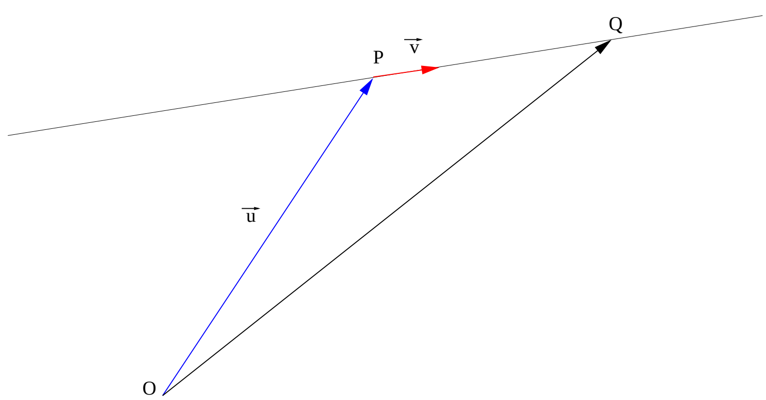

Fig. 4: rappresentazione vettoriale di una retta.

Nel caso di rette passanti per l'origine $\vec{u} = \vec{0}$. Analogamente un punto piano si rappresenta con la relazione

$$\vec{OQ} = \vec{u} + \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$$

dove i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono linearmente indipendenti e individuano l'inclinazione del piano nello spazio, mentre $\vec{u}$ è nullo se il piano passa per l'origine.

Per rappresentare parallelepipedo consideriamo tre vettori diretti come i suoi lati $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ a partire da un origine comune; un punto qualunque P interno al parallelepipedo si individua con il vettore

$$\vec{OP} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 \qquad \lambda_i \in [0, 1] \quad i = 1, 2, 3$$

dove λ_i sono numeri appartenenti all'intervallo [0,1].

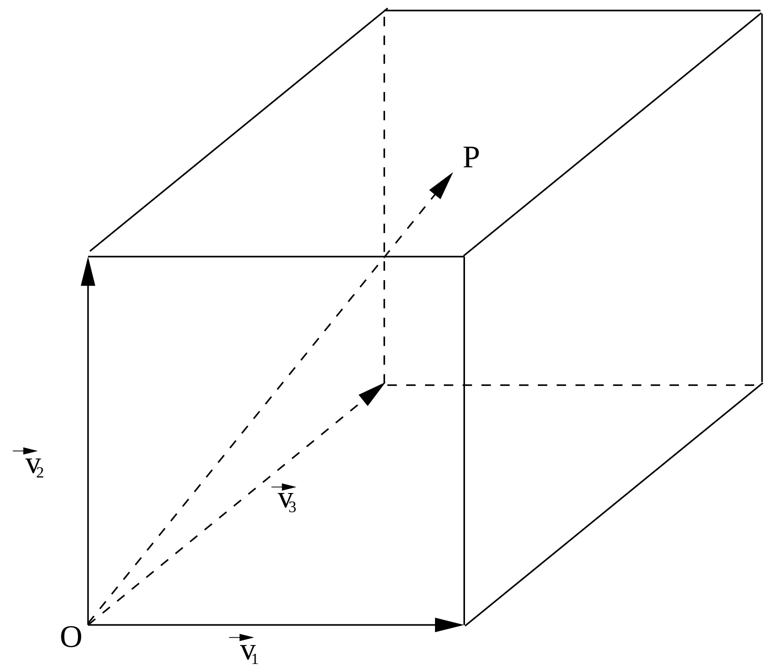

Fig. 5: rappresentazione vettoriale di un parallelepipedo.

Riferendosi all'esempio del parallelepipedo, osserviamo che i punti che corrispondono alle sue facce sono caratterizzati dal fatto che uno dei parametri λ_i prende il valore 0 o 1. Ad esempio i vettori

$$\vec{OP} = \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 \qquad \lambda_j \in [0,1] \quad j = 2,3$$

definiscono la faccia sulla punta del vettore $\vec{v}_1$ (vedi fig. 5). In questo modo è facile contare quante facce ha un parallelepipedo contando quanti sono gli estremi dei vettori che lo generano per combinazione lineare: nel caso dello spazio tridimensionale essendo 3 i vettori avremo 6 possibili estremi e quindi 6 facce per il parallelepipedo. Utilizzando un ragionamento analogo si possono definire i punti lungo uno spigolo di un parallelepipedo fissando a 0 o 1 il valore di 2 dei parametri λ_i introdotti nella definizione del parallelepipedo. Ad esempio i vettori

$$\vec{OP} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 \qquad \lambda_3 \in [0,1]$$

indicano lo spigolo in alto a destra parallelo al vettore $\vec{v}_3$. Gli spigoli di un parallelepipedo tridimensionale si possono contare trovando in quanti modi si possono scegliere 2 estremi di due diversi vettori che generano il parallelepipedo; dal calcolo combinatorio abbiamo 12 spigoli.
Associando il concetto di vettore a quello di segmento orientato nello spazio è naturale introdurre il concetto di *lunghezza* di un vettore: indicheremo con $|\vec{v}|$ la lunghezza del vettore $\vec{v}$ (ovvero il numero reale che definisce la lunghezza in una determinata unità di misura). Pur avendo la lunghezza euclidea un ruolo privilegiato nelle applicazione, un'introduzione

generale del concetto di lunghezza in matematica ha consentito di concepire l'idea che lo spazio euclideo non sia l'unico spazio possibile ma esistano spazi curvi e geometrie non-euclidee prima ancora che la relatività di Einstein fosse formulata e ci si rendesse conto che la geometria euclidea fosse un'approssimazione delle geometria dell'universo. Un esempio di geometria non euclidea è anche la geometria su una sfera quale la superficie terrestre. Partendo da un punto di vista generale introdurremo la lunghezza da un punto di vista matematico mediante la definizione del prodotto scalare e delle sue proprietà algebriche: il *prodotto scalare* tra due vettori è un'operazione algebrica che ha come risultato un numero reale e viene usualmente indicata con $\vec{u}\cdot\vec{v}$. Lasciando da parte per il momento il significato geometrico, il prodotto scalare è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

$$\vec{u}\cdot\vec{u} \geq 0 \qquad \vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{u} = 0$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$$
$$\vec{u}\cdot(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2) = \lambda_1\vec{u}\cdot\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{u}\cdot\vec{v}_2$$

Il prodotto scalare risulta quindi un'operazione communativa che si comporta in modo *lineare* rispetto alla somma e moltiplicazione per uno scalare (ovvero *distribuisce* rispetto a combinazioni lineari tra vettori). Utilizzando il prodotto scalare possiamo introdurre la lunghezza di un vettore secondo la definizione

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

Il vantaggio di definire la lunghezza in modo astratto sta nel mettere in evidenza quelle che sono le *proprietà essenziali* della lunghezza che non sono solo caratteristiche della usuale lunghezza euclidea, ma anche di altri tipi di lunghezza *non euclidea* alla base nuovi tipi di geometrie scoperte nell'ottocento. In effetti la lunghezza euclidea di un segmento o la distanza tra due punti in un piano cartesiano e strettamente legata all'idea di retta tra due punti: ovvero il numero che noi chiamiamo distanza è il rapporto tra il segmento di retta tra due punti e un segmento campione che definisce l'unità di misura. La scelta della retta come curva su cui misurare la lunghezza tra due punti contiene in effetti dell'arbitrariatà ed è un punto essenziale della geometria euclidea.
Senza utilizzare esplicitamente la geometria euclidea si può dimostrare che la lunghezza gode selle proprietà

$$|\vec{\lambda v}| = |\lambda||\vec{v}|$$

(la lunghezza non dipende dalla direzione e se dilatiamo o contraiamo un vettore lo stesso accade per la sua lunghezza) e della *proprietà triangolare*

$$|\vec{v}+\vec{u}| \leq |\vec{v}| + |\vec{u}|$$

(la lunghezza di un lato di un triangolo è sempre minore della somma delle lunghezza degli altri due). Indichiamo la lunghezza euclidea di un vettore con $\|\vec{v}\|$ come la lunghezza del segmento definito dai vertici del vettore.
Nello spazio tridimesionale euclideo il prodotto scalare si definisce in relazione alla lunghezza secondo la regola

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|u\|\|v\|\cos\theta$$

dove θ è l'angolo compreso tra i vettori(vedi fig. 6).

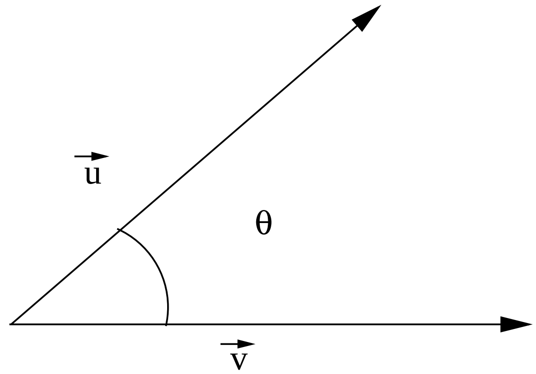

Fig. 6: Prodotto scalare tra vettori.

Il significato geometrico del prodotto scalare è quello di moltiplicare la lunghezza di un vettore per la proiezione dell'altro vettore sulla direzione del primo (tenendo conto del segno). Nel caso infatti che uno dei vettori sia di lunghezza unitaria il prodotto scalare indica direttamente la proiezione di un vettore lungo una direzione. Tale definizione si può generalizzare anche a spazi vettoriali di dimensione maggiore di 3. Si dimostra inoltre che la definizione di prodotto scalare nello spazio euclideo soddisfa i requisiti di linearità rispetto alla combinazione lineare di vettori ovvero distribuisce rispetto alla somma di combinazioni di vettori. Utilizzando il prodotto scalare possiamo definire i vettori di lunghezza unitaria $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$ e i vettori ortogonali: due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ non nulli si diranno ortogonali se vale

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

È chiaro che tale condizione implica $\cos\theta = 0$ e quindi $\theta = \pi/2, 3\pi/2$. Il concetto di ortogonalità consente di costruire delle *basi* per lo spazio vettoriale formate da vettori di lunghezza unitaria tutti ortogonali tra loro: le cosı̀ dette *basi ortonomali*. Le basi ortonormali $\vec{e}_i$ $i = 1, .., N$ soddisfano alle relazioni

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Tali basi formano i cosidetti sistemi di riferimento cartesiani per lo spazio. Infatti se fissiamo un sistema di riferimento cartesiano x, y, z per lo spazio, associando a ciascun asse coordinato un versore $\hat{;}x, haty, \hat{z}$ diretto come l'asse stesso abbiamo automaticamente una base ortonormale (vedi fig. 7). L'utilizzo di una base ortonormale facilita sia il calcolo delle componenti di un vettore che il prodotto scalare tra vettori. Dato un vettore $\vec{v}$ nello spazio le sue componenti v_x, v_y, v_z nella base cartesiana sono le proiezioni ortogonali del vettore sugli assi coordinati(vedi fig. 7) che si calcolano usando il prodotto scalare

$$v_x = \vec{v} \cdot \hat{x}, \qquad v_y = \vec{v} \cdot \hat{y}, \qquad v_z = \vec{v} \cdot \hat{z}$$

Il vettore $\vec{v}$ si esprime come combinazione lineare

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$$

Notiamo che le componenti (v_x, v_y, v_z) coincidono con le coordinate cartesiane del punto finale del vettore $\vec{v}$ applicato nell'origine; esiste pertanto una corrispondenza biunivoca tra le componenti di vettori applicati nell'origine e le coordinate dei nello spazio.

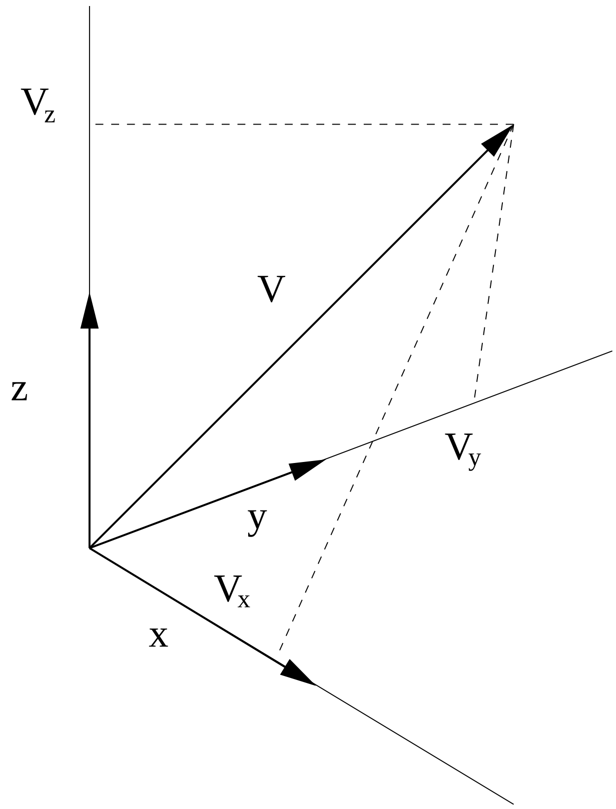

Fig. 7: Rappresentazione di un vettore in una base ortonormale.

Utilizzando una base ortonormale la lunghezza di $\vec{v}$ si ottiene da

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

in accordo con il teorema di Pitagora ed il prodotto scalare tra due vettori è dato da

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_x u_x + v_y u_y + v_z u_z$$

Si comprende quindi il ruolo privilegiato che hanno le basi ortonormali (o cartesiane) nella rappresentazione di uno spazio vettoriale. Utilizzando il prodotto scalare e le componenti cartesiane possiamo calcolare il coseno dell'angolo tra due vettori qualunque mediante

$$\cos\theta = \frac{v_x u_x + v_y u_y + v_z u_z}{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|}$$

Per i vettori nello spazio si può introdurre un secondo prodotto detto *prodotto vettore* che viene indicato con $\vec{v} \times \vec{u}$. La lunghezze del prodotto vettore si definisce

$$\|\vec{v} \times \vec{u}\| = \|\vec{v}\|\|\vec{u}\||\sin\theta|$$

dove θ è l'angolo compreso tra i vettori. La direzione del prodotto vettore si ottiene secondo la regola della mano destra: ovvero è la direzione del pollice quando ruotando le dita si porta il vettore $\vec{v}$ a sovrapporsi al vettore $\vec{u}$ (vedi fig. 8).

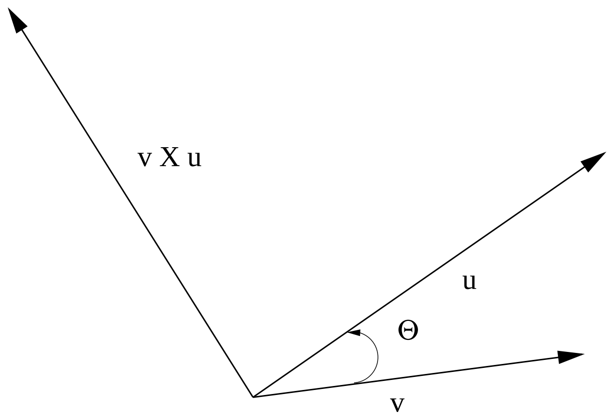

Fig. 8: Illustrazione del calcolo del prodotto vettore.

IL vettore così costruito è sempre ortogonale al piano individuato dai vettori iniziali $\vec{v}, \vec{u}$ e ha lunghezza pari all'area del parallelogramma formato dai vettori. Utilizzando le coordinate cartesiane è possibile costruire un'espressione algebrica per il prodotto vettore secondo la formula

$$\vec{v} \times \vec{u} = (v_y u_z - v_z u_y)\hat{x} + (v_z u_x - v_x u_z)\hat{y} + (v_x u_y - v_y u_x)\hat{z}$$

Tale formula dà la possibilità di calcolare l'area del parallelogramma compreso tra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$ tramite la lunghezza del vettore $\vec{v} \times \vec{u}$. Nel caso di vettori sul piano

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y}$$
$$\vec{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y}$$

il prodotto vettore si semplifica in

$$\vec{v} \times \vec{u} = (v_x u_y - v_y u_x)\hat{z}$$

e l'area del parallelogramma è data da $|v_x u_y - v_y u_x|$